DURÉE : 4 heures

Les candidats peuvent utiliser du papier millimétré (2 feuilles).

On désigne par $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels, par* $\mathbb{R}^*$ *l'ensemble des réels non nuls et par* $\mathbb{R}_+^*$ *l'ensemble des réels strictement positifs.*

On donne :

— Ω *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$;

— φ *une application continue de* Ω *dans lui-même, telle que* $\varphi(\varphi(x)) = x$ *pour tout* $x \in \Omega$;

— *deux nombres,* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On se propose de déterminer, dans certains cas, les applications f *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont continues, dérivables en tout point de* Ω *et telles que*

(E) $\qquad f'(x) = \alpha f(x) + \beta f(\varphi(x)) \qquad$ *pour tout* $x \in \Omega$.

On dira que f, *si elle existe, est une solution de l'équation* (E). *On remarquera que l'ensemble des solutions de* (E) *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

NOTA : *Les parties II et III sont indépendantes.*

PREMIÈRE PARTIE

On suppose que (E) admet une solution non nulle f.

1° Montrer que f' est continue en tout point de Ω et est dérivable en tout point de Ω où φ est dérivable.

2° Établir la relation : $\forall x \in \Omega$, $f'(\varphi(x)) = \frac{1}{\beta}[\alpha f'(x) + (\beta^2 - \alpha^2) f(x)]$.

En déduire que si φ est dérivable au point x de Ω, alors :

$$f''(x) - \alpha[1 + \varphi'(x)] f'(x) - (\beta^2 - \alpha^2) \varphi'(x) f(x) = 0.$$

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute cette partie on suppose $\beta^2 - \alpha^2 = 0$ et φ dérivable en tout point de Ω.

1° Montrer que si f est solution de (E), il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \Omega \qquad f'(x) = k \exp(\alpha(x + \varphi(x)))$$

2° Dans cette question $\Omega = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = a - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, a constante. Déterminer en utilisant ce qui précède les solutions de (E).
(On distinguera les cas $\alpha = -\beta$ et $\alpha = \beta$.)

3° Dans cette question $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit f une solution de (E).

a. Montrer qu'il existe des constantes k et l telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = k \int_1^x \exp\left[\alpha\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt + l.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

b. Montrer que l'intégrale

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \exp\left[\alpha\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt$$

s'exprime simplement en fonction de $\exp\left[\alpha\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$ et de $\int_1^x \exp\left[\alpha\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt$.

c. En déduire les solutions de (E). (On distinguera les cas $\alpha = -\beta$ et $\alpha = \beta$.) Montrer que, en particulier, il existe une solution et une seule prenant au point 1 une valeur donnée θ.

d. On suppose $\alpha = \beta$, $\theta = 1$ et on désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(1) = 1$. Étudier les variations de f. On montrera en particulier que :

i. si $\alpha > 0$; $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ii. si $\alpha < 0$; il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to 0} f(x) = l$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -l$.

.../...

ENSET 1980 (A2)

e. Calculer avec la meilleure précision possible l'intégrale :

$$\int_0^1 \exp\left[-\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] dt$$

par la méthode des trapèzes en divisant l'intervalle [0, 1] en 10 parties égales. En déduire une valeur approchée du nombre l défini ci-dessus dans le cas $\alpha = -1$; on donnera une estimation de l'erreur commise.

Troisième partie

Dans cette partie $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$. On donne $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ et φ définie par $\varphi(x) = -b^2x + a(1+b^2)$ pour tout $x \geqslant a$.

1° Donner l'expression de φ pour $x \leqslant a$.

2° Soit f une solution de (E).

a. En utilisant le I.2° donner l'expression de f pour $x \geqslant a$.

b. En utilisant l'équation (E), déduire du *a.* ci-dessus, l'expression de f pour $x \leqslant a$.

c. Déduire les solutions de (E) de ce qui précède.

3° On prend $a = 0$, $b = 2$; il existe une solution unique f de (E) telle que $f(0) = 2$, à savoir :

$$f(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} \qquad \text{pour } x \leqslant 0$$

$$f(x) = 2\cos 2x + \sin 2x \qquad \text{pour } x \geqslant 0.$$

Étudier les variations de f pour $x \in [-4\pi, \pi]$. Tracer sur papier millimétré le graphe de f en prenant pour unité sur l'axe des x 1 cm, et pour unité sur l'axe des y 2 cm.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail